matrice orthogonale la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

matrice symétrique !

① $\boxed{\text{Valeurs propres}}$ → racines de $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

On trouve

$\lambda = 2$ (avec mult. alg. 1) et $\lambda = -1$ (multiplicité alg. 2)

② • $\underbrace{E_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}}_{\text{on calcule une base de } \ker(A-2I_3)} \xrightarrow{\boxed{GS}} \mathcal{B}_2 = \left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\right\}$

bon de E_2

• $\underbrace{E_{-1} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}_{\text{on calcule une base de } \ker(A+I_3)} \xrightarrow{\boxed{GS}} \mathcal{B}_{-1} = \left\{\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\right\}$

bon de E_{-1}

$$\Longrightarrow \mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\right\} \text{ bon. de } \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow P := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \\ D := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \rightarrow P^T A P = D$$

$\square$

Chapitre 14 : Décomposition en valeurs singulières (SVD)

$\boxed{\text{Objectif}}$ é.d. $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \xrightarrow[\text{veut}]{\text{on}} \begin{cases} \bullet\ U \in \mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{R}) \text{ orthogonale} \\ \bullet\ \Sigma \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \text{ diagonale et non-nég.} \\ \bullet\ V \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \text{ orthogonale} \end{cases}$

telle que

$$\boxed{A = U \Sigma V^T}$$

décomposition en valeurs singulières (SVD)

$$\boxed{\Sigma_{i,j} \geq 0 \quad \forall i,j}$$

Rq

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \underset{>0}{\Sigma_{1,1}} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \underset{>0}{\Sigma_{\ell,\ell}} & & & \\ & 0 & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Convention : $\underbrace{\Sigma_{1,1} \geq \Sigma_{2,2} \geq \cdots \geq \Sigma_{\ell,\ell}}_{\text{valeurs singulières de } A} > 0 , \ldots$

THM 14.6 É.d $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, il existe toujours une SVD.

(<u>Terminologie</u>:
- les colonnes de U s'appellent <u>vecteurs singuliers à gauche</u>
- les colonnes de V s'appellent <u>vecteurs singuliers à droite</u>.)

Comment calculer une SVD ?

(1) Calculer la matrice Σ :

(i) Calculer les valeurs propres $\boxed{\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n}$ de $A^T A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$

on répète chaque valeur propre selon sa multiplicité

$\boxed{\text{FAIT (Prop 14.9)} \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0}$

(ii) Garder les valeurs propres positives de $A^T A$: $\boxed{\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_\ell > 0}$

FAIT $\ell = \text{rang}(A)$
(Por. 14.12)

On pose $\Sigma := \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \sqrt{\lambda_\ell} & & & \\ & 0 & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}\right\}}_{n \text{ colonnes}} m \text{ lignes}$

Rq : taille(Σ) = taille(A) !

② **Calculer V**

On calcule une bon $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de $A^T A$ et

$$V := [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

(où $\bar{v}_i$ est vecteur propre de valeur propre λ_i)

$\boxed{\text{Rq}}$ $A^T A$ symétrique $\Longrightarrow$ $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ existe !!

3 $\boxed{\text{Calculer } U}$

i $\bar{u}_j := \dfrac{A \cdot \bar{v}_j}{\sqrt{\lambda_j}}$, $1 \leq j \leq l$

Seulement si $\ell < m$!!

(ii) Si $\boxed{\ell < m}$, on calcule une base de $\mathrm{Ker}(A^T) \overset{\text{Lemme 14.7}}{=} \mathrm{Ker}(A \cdot A^T)$

$\longrightarrow \underbrace{\{\bar{w}_{\ell+1}, \dots, \bar{w}_m\}}_{\text{base de } \mathrm{Ker}(A^T)} \subseteq \mathbb{R}^m$

et on applique GS à $\{\bar{w}_{\ell+1}, \dots, \bar{w}_m\}$ pour obtenir une bon $\{\bar{u}_{\ell+1}, \dots, \bar{u}_m\}$ de $\mathrm{Ker}(A^T)$.

On pose

$U := [\bar{u}_1 \dots \bar{u}_l \ \bar{u}_{l+1} \dots \bar{u}_m]$

$\boxed{\text{Pourquoi } A^T A\ ?}$ $\longrightarrow$ Si $A = U \Sigma V^T$

$$\Rightarrow A^T = V \Sigma^T U^T$$

$$\Rightarrow A^T A = V \Sigma^T \overbrace{U^T U}^{I_m} \Sigma V^T$$

$$= V \cdot \underbrace{\Sigma^T \Sigma}_{\text{matrice diagonale}} V^T$$

$\boxed{\text{Rq}}$ $\boxed{\|A\bar{v}_j\| = \sqrt{\lambda_j} \ , \forall 1 \leq j \leq l\ ?}$

EXM 14.15

$$A = \begin{pmatrix} 3/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \\ 9/10\sqrt{2} & 13/10\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Calculer une SVD de A.

① Calcul de Σ : $\longrightarrow A^T A = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 153 & 96 \\ 96 & 97 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ valeurs propres : $\frac{9}{4}$ et $\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

② Calcul de V :

$$E_{9/4} = \ker\left(A^T A - \frac{9}{4} I_2\right) \xrightarrow{\text{base}} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{bon}} \left\{ \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{1/4} = \ker\left(A^T A - \frac{1}{4} I_2\right) \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

③ Calcul de U :

$$l = \text{rang}(A) = 2 = m$$

$$\bar{u}_1 = \frac{A \cdot \bar{v}_1}{3/2} \quad \text{et} \quad \bar{u}_2 = \frac{A \cdot \bar{v}_2}{1/2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Alors

SVD $\to$ $$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}^T}_{V^T}$$

EXM 14.17 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer une SVD de A.